Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2014

Prüfungsfach:	Mathematik (nichttechnische Ausbildungsrichtung)
Prüfungstag:	Donnerstag, 26. Juni 2014
Prüfungsdauer:	9:00 – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner; zugelassene Formelsammlung

Hinweise:

Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.

Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Die Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Der Graph G_f der Funktion f verläuft durch den Ursprung des Koordinatensystems. Er hat im Punkt $P_1(1/-3)$ einen relativen Tiefpunkt und an der Stelle $x_W = 2$ einen Wendepunkt.	
1.1	Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$. $\left[\text{Mögliches Ergebnis}: f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x\right]$	6
1.2	Ermitteln Sie den Funktionsterm $f(x)$ in vollständig faktorisierter Form. [Zwischenergebnis: $x_2 = 3$]	3
1.3	G_f hat außer P_1 noch einen weiteren relativen Extrempunkt P_2. Geben Sie Art und Koordinaten von P_2 ohne weitere Rechnung an. Begründen Sie lediglich kurz Ihre Angabe.	3
1.4	Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_f und bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Wendetangente G_w. $\left[\text{mögliches Ergebnis}: y = \frac{9}{4}x - 6\right]$	3
1.5	Zeichnen Sie G_f und die Wendetangente G_w unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse für $x \in [0; 4]$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm.	4
1.6	G_f schließt zwischen den beiden Nullstellen von f mit der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Schraffieren Sie dieses Flächenstück in der graphischen Darstellung der Teilaufgabe 1.5 und berechnen Sie die Maßzahl A des Flächeninhaltes dieses Flächenstücks.	4
1.7	Ein weiteres Flächenstück wird durch die Wendetangente G_w und durch die beiden Koordinatenachsen festgelegt. Berechnen Sie die Maßzahl B des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.	2
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Die Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades. Der Graph G_f der Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Des Weiteren schneidet er die Koordinatenachsen in den Punkten $N(1 \mid 0)$ und $P\left(0 \middle\vert \frac{7}{3}\right)$ und hat an der Stelle $x_1 = 2$ einen relativen Tiefpunkt.	
2.1	Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$. $\left[\text{mögliches Ergebnis: } f(x) = \frac{1}{3}\left(x^4 - 8x^2 + 7\right)\right]$	6
2.2	Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller Extrempunkte von G_f.	5
2.3	Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse für $x \in [-3;3]$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE $\hat{=}$ 1cm.	3
2.4	Der Graph G_f schließt im I. und II. Quadranten mit der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Zeigen Sie, dass für die Maßzahl A des Flächeninhaltes dieses Flächenstücks gilt: $A = \frac{136}{45}$ (FE).	4
2.5.0	Die Funktion p mit $D_p = \mathbb{R}$ ist eine weitere ganzrationale Funktion. Der Funktionsterm von p lautet: $p(x) = \frac{7}{3}x^2 - \frac{7}{3}$.	
2.5.1	Bestimmen Sie die Nullstellen von p und zeichnen Sie die zu p gehörige Parabel G_p in das Koordinatensystem von 2.3 ein.	3
2.5.2	Der Graph G_p schließt im III. und IV. Quadranten mit der x-Achse ebenfalls ein endliches Flächenstück mit der zugehörigen Maßzahl B seines Flächeninhaltes ein. Berechnen Sie die prozentuale Abweichung der Flächenmaßzahl B von der Maßzahl A des Flächeninhaltes aus Aufgabe 2.4.	4
	Summe:	25

<table>
<tr><th colspan="2">Analysis: Aufgabe 3</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>3.0</td><td>

Der Chef eines Parfümherstellers ist Mathematiker.
Er hat das Produkt *„Duft Hoch 4“* entwickelt, das er in Glasfläschchen abfüllt (stehende Flasche: s. Abb. 1).
Die obere Kante des liegenden Fläschchens kann als Graph einer ganzrationalen Funktion b vom Grad 4 modelliert werden. (liegende Flasche: s. Abb. 2).
Der Funktionsterm von b lautet:

$$b(x)=-\frac{1}{20}\left(\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2-100\right).$$

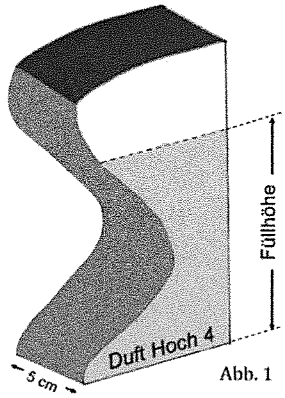


Abb. 1

x soll das Maß für die Füllhöhe in cm, $b(x)$ die Breite des Fläschchens an der Stelle x in cm sein.
Die Tiefe des Fläschchens beträgt konstant 5 cm.
Die Dicke des Glases wird nicht berücksichtigt.
Einheiten können bei allen Berechnungen (außer 3.3.2) weggelassen werden.

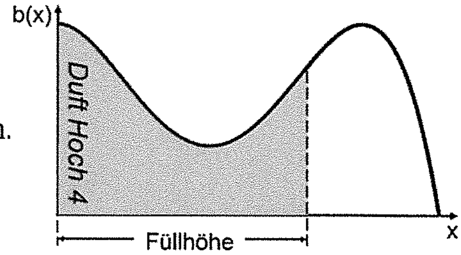
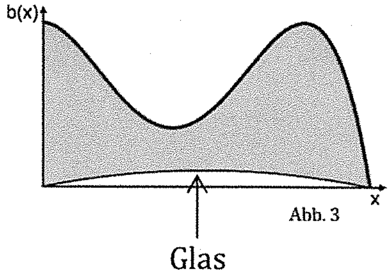
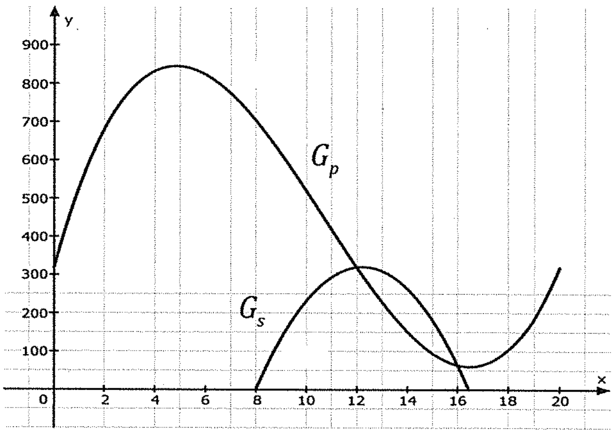


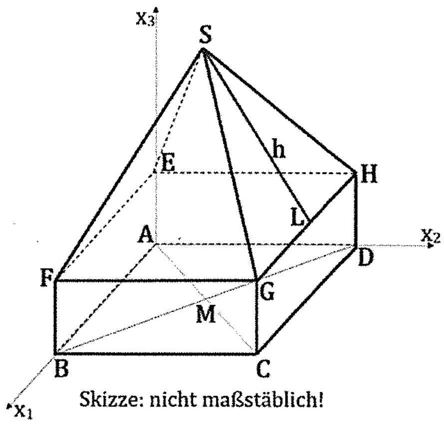
Abb. 2

</td><td></td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Zeigen Sie rechnerisch, dass das Fläschchen eine maximale Füllhöhe von 10 cm besitzt. Geben Sie sodann eine sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion b an.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3.2.0</td><td>Zur Konstruktion des Fläschchens am PC benötigt man folgende Berechnungen.</td><td></td></tr>
<tr><td>3.2.1</td><td>Bestimmen Sie die maximale Breite des Fläschchens.
[Kontrollergebnis: Die maximale Breite beträgt 5 cm.]</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3.2.2</td><td>Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_b in ein Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3.2.3</td><td>Der Hersteller beabsichtigt, in diesen Fläschchen 150 ml Parfüm abzufüllen. Zeigen Sie, dass dies mit diesen Fläschchen möglich ist. [Hinweis: 1 ml = 1 cm³]</td><td>6</td></tr>
</table>

3.3.0	Die Marketingabteilung des Herstellers möchte an der unteren Seite der liegenden Flasche (s. Abb. 3) innen eine durchsichtige Glasfüllung einbauen, die verkaufspsychologisch wirkt, aber den Inhalt verringert. Dieser Glaseinsatz erstreckt sich über die gesamte Tiefe des Fläschchens und wölbt sich parabelförmig nach innen.  Dieser Einsatz wird von der x-Achse und dem Graphen der Funktion w mit $w(x)=-\frac{1}{50}x(x-10)$ für $x\in[0;10]$ begrenzt (siehe Abbildung 3).	
3.3.1	Zeichnen Sie den Graphen G_w in das Koordinatensystem von Aufgabe 3.2.2 ein. Entscheiden Sie rechnerisch, ob die Vorgaben des Herstellers, 150 ml Parfüm abzufüllen, durch den Wunsch der Marketingabteilung noch erfüllbar sind.	5
3.3.2	Das Fläschchen soll für den Verkauf in eine quaderförmige Schachtel verpackt werden. Bestimmen Sie die Mindestmaße dieser Schachtel und berechnen Sie die Oberfläche des Verpackungsmaterials in cm^2.	3
	Summe:	25

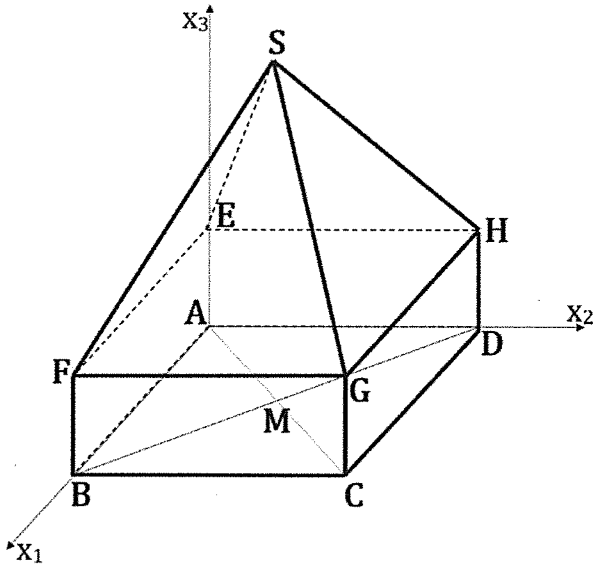
Analysis: Aufgabe 4		BE
4.0	Die Leistungsaufnahme der Backöfen einer Großbäckerei lässt sich im Zeitraum von 0 Uhr bis 20:00 Uhr annähernd durch die Funktion p mit dem Term $p(x)=x^3-32x^2+240x+320$ und $D_p=[0;20]$ beschreiben. Der zugehörige Graph wird mit G_p bezeichnet.  Die betriebseigene Solaranlage speist an einem sonnigen Wintertag eine bestimmte Leistung in das Stromnetz ein. Die graphische Darstellung der Einspeiseleistung in Abhängigkeit von der Zeit hat einen parabelförmigen Verlauf und lässt sich durch die Funktion s mit dem Term $s(x)=-18x^2+440x-2368$ beschreiben. Der zugehörige Graph von s wird mit G_s bezeichnet. Hinweis: $p(x)$ und $s(x)$ geben die momentane Leistung in der Einheit kW (Kilowatt) zur Zeit x in Stunden nach Mitternacht an. Auf die Mitführung von Einheiten wird in den folgenden Rechnungen verzichtet.	
4.1	Bestimmen Sie die Uhrzeiten auf Minuten genau, zu denen die Backöfen maximale bzw. minimale Leistungsaufnahme haben. Berechnen Sie die maximale bzw. minimale Leistungsaufnahme der Öfen.	5
4.2	Die Einspeiseleistung der Solaranlage hängt von der Sonneneinstrahlung ab. Bestimmen Sie die Dauer des Zeitraums, in dem die Solaranlage eine Einspeiseleistung $s(x)\geq 0$ erbringt und legen Sie diesen Zeitraum als Definitionsmenge D_s fest.	3
4.3	Um 12:00 Uhr Mittag ist die Leistungsaufnahme der Bäckerei exakt gleich der Einspeiseleistung der Solaranlage. Berechnen Sie die Uhrzeit an diesem Tag auf Minuten genau, bei der dies erneut der Fall ist.	5
4.4	Im Zeitraum von 12:00 Uhr bis 16:00 Uhr ist die Einspeiseleistung größer als die Leistungsaufnahme. Die Überschussleistung kann mit Hilfe der Funktion f mit $f(x) = s(x)-p(x)$ berechnet werden. Ermitteln Sie die Uhrzeit auf Minuten genau, bei der die Überschussleistung maximal groß ist.	5

4.5	Die vom Graphen G_s und der x-Achse eingeschlossene Fläche ist ein Maß für die in das Netz eingespeiste elektrische Energie E. Berechnen Sie den Zahlenwert für die eingespeiste Energie E_1.	4
4.6	Die von den beiden Graphen G_p und G_s eingeschlossene Fläche ist ein Maß für die Energie-Nettoeinspeisung E_2 im Zeitraum zwischen 12:00 Uhr und 16:00 Uhr. Berechnen Sie den Wert von E_2.	3
	Summe:	25

Geometrie: Aufgabe 5		BE
5.0	Ein Jugendhaus wird auf einer ebenen Fläche errichtet. Die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche sind $A(0/0/0)$, $B(12/0/0)$, $C(c_1/c_2/0)$ und $D(d_1/d_2/0)$ $(c_1,c_2,d_1,d_2 \in \mathbb{R})$. [Maßstab: 1 LE ≙ 1 m] Das Jugendhaus besitzt einen quaderförmigen Gruppenraum (Höhe: 3m) im Erdgeschoß und einen pyramidenförmigen Partyraum im Obergeschoß (s. Abbildung) mit der Spitze $S(6/6/12)$.  Skizze: nicht maßstäblich! Die x_1-Achse zeigt in südliche Himmelsrichtung und die x_2-Achse in östliche Himmelsrichtung. Auf die Mitführung von Einheiten kann verzichtet werden.	
5.1	Zeigen Sie rechnerisch, dass der Diagonalenschnittpunkt M des Quadrats $ABCD$ die Koordinaten $M(6/6/0)$ besitzt.	2
5.2	Ermitteln Sie die Maßzahl V_G des Rauminhaltes des Gruppenraums im Erdgeschoss und die Maßzahl V_P des Volumens des Partyraums im Obergeschoss und vergleichen Sie beide Maßzahlen.	4
5.3	Das Dach des Jugendhauses besteht aus vier Dreiecken. Drei dieser Dreiecke (Nord-, West- und Südseite) sollen mit Dachziegeln eingedeckt werden. Die Kosten für die Dachziegeln übernimmt ein Förderverein, der dafür 1800 € bereitlegt. Zeigen Sie, dass die Gelder des Fördervereins ausreichen, wenn 1m^2 Dachziegel im Einkauf 9,00 € kostet.	5
5.4	Eine Glaserei wird die verbleibende (nach Osten zeigende) Dachseite vollständig verglasen. Berechnen Sie die Länge $\overline{LS}$ der Höhe h des Dreiecks GHS.	4
5.5	Eine Schreinerei erstellt kostenlos Einbauschränke für den Partyraum im Obergeschoss. Bestimmen Sie dazu die Größe des Neigungswinkels $\sphericalangle HFS$ der Seitenkante $[SF]$ der Pyramide zum Fußboden des Partyraums.	4
5.6	Bearbeiten Sie das Beiblatt.	6
	Summe:	25

5.6 Die Raumbilder zeigen einen Körper, der aus einem Quader und einer aufgesetzten Pyramide (siehe Aufgabe 5.0) besteht.
Gegeben sind zwei Vektormengen.
Zeichnen Sie die jeweils angegebenen Vektoren in die entsprechenden nebenstehenden Raumbilder ein. Kreuzen Sie dann jeweils an, ob die angegebenen Eigenschaften auf die Elemente der gegebenen Vektormengen zutreffen.
Beachten Sie: Bei einem falsch gesetzten Kreuz wird eine Bewertungseinheit abgezogen. Weniger als 0 Bewertungseinheiten sind nicht möglich.

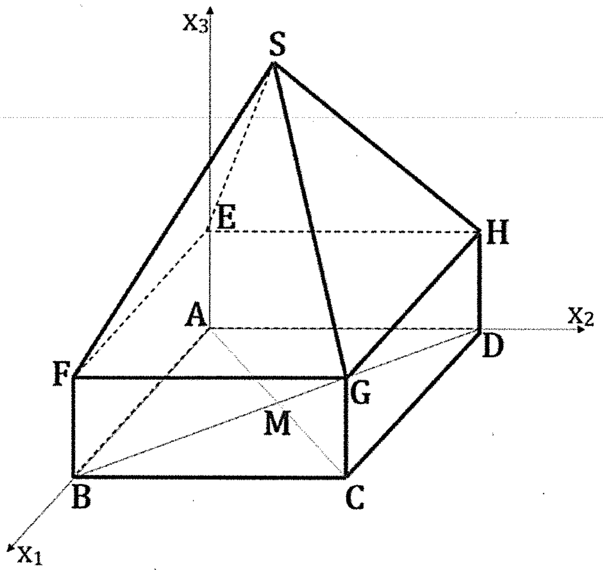
a) $\{\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{ES};\ \overrightarrow{MS};\ \overrightarrow{SG}\}$



komplanar
ja [ ]
nein [ ]

linear abhängig
ja [ ]
nein [ ]

b) $\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{GH};\ \overrightarrow{HB}\}$



komplanar
ja [ ]
nein [ ]

linear unabhängig
ja [ ]
nein [ ]