Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2014

Prüfungsfach:	Mathematik (technische Ausbildungsrichtung)
Prüfungstag:	Donnerstag, 26. Juni 2014
Prüfungsdauer:	9:00 – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner; zugelassene Formelsammlung

Hinweise: Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

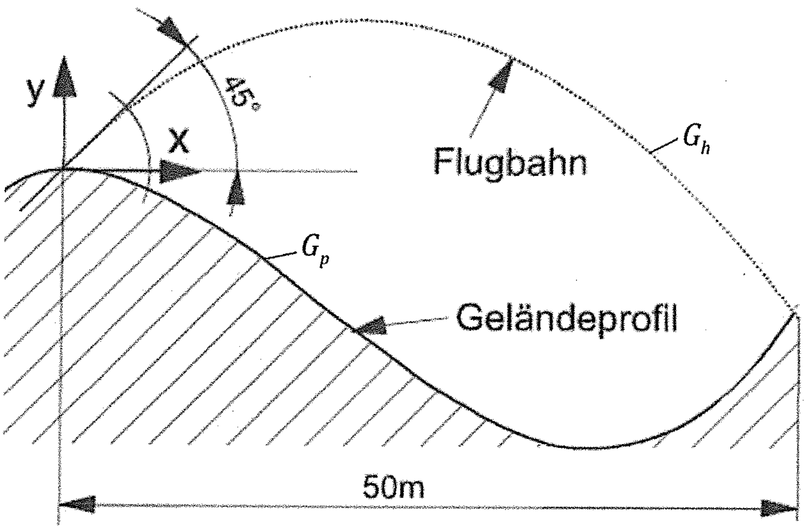
Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.

Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x)=\frac{x^2+4}{2x-3}$ auf ihrem maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.	
1.1	Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f.	2
1.2	Ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f. $\left[\text{Teilergebnis}: f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}+\frac{25}{4(2x-3)}\right]$	5
1.3	Bestimmen Sie Art und Koordinaten aller relativer Extrempunkte von G_f. $\left[\text{Teilergebnis}: f'(x)=\frac{2x^2-6x-8}{(2x-3)^2}\right]$	6
1.4	Berechnen Sie die Funktionswerte von f an den Stellen $x_1=-4$, $x_2=2$ und $x_3=14$ auf eine Nachkommastelle gerundet. Zeichnen Sie in ein kartesisches Koordinatensystem die zugehörigen Graphenpunkte $P_1(x_1 / f(x_1))$, $P_2(x_2 / f(x_2))$ und $P_3(x_3 / f(x_3))$, alle Asymptoten sowie alle Extrempunkte von G_f ein. Skizzieren Sie sodann den Verlauf des Graphen G_f unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse.	6
1.5	Der Graph G_f und die Gerade mit der Gleichung $y=8$ schließen ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Skizze zu Aufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.	6
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto (1-x)\cdot e^{1-x}$ auf ihrer Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem rechtwinkligen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.	
2.1	Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen.	2
2.2	Ermitteln Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.	4
2.3	Bestimmen Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes des Graphen G_f. $\left[\text{Teilergebnis}: f'(x) = (x-2)\cdot e^{1-x}\right]$	6
2.4	Berechnen Sie $f(-0{,}5)$ und $f(4)$ und skizzieren Sie den Graphen G_f im Bereich $-0{,}5 \le x \le 4$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in einem geeigneten Koordinatensystem.	5
2.5	Nennen Sie hinreichend viele Argumente dafür, dass G_f im Intervall $[0;\infty[$ einen Wendepunkt besitzt.	3
2.6	Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto x \cdot e^{1-x}$, mit $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^1 f(x)dx$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.	5
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 3		BE
3.0	Die Flugbahn eines Gegenstandes kann unter bestimmten Vereinfachungen als eine nach unten geöffnete Parabel G_h mit dem zugehörigen Funktionsterm $h(x)=ax^2+bx+c$ mit $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ aufgefasst werden. (Auf die Mitführung der Einheiten wird in dieser Aufgabe verzichtet.)  Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Startpunkt der Flugbahn G_h. Der Abwurf des Gegenstandes erfolgt unter einem Winkel von 45° zur Horizontalen. Der Gegenstand schlägt bei $x_1=50$ (Meter) wieder auf dem Boden auf. Der Verlauf des Geländeprofils kann angenähert durch den Graphen einer Funktion p mit dem folgenden Funktionsterm beschrieben werden: $p(x)=\frac{1}{1250}x^3-\frac{11}{250}x^2;\quad x\in[-10;60]$	
3.1	Ermitteln Sie den Funktionsterm $h(x)$ und geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion h an. $\left[\text{mögliches Ergebnis } h(x)=-0{,}024x^2+x\right]$	6
3.2	Bestimmen Sie die Koordinaten des höchsten Punktes A der Flugbahn G_h bezogen auf die Abwurfhöhe.	3
3.3	Zeigen Sie, dass das Gelände an der Stelle $x_1=50$ die Steigung $m=\frac{8}{5}$ besitzt.	3
3.4	Prüfen Sie, ob der Gegenstand senkrecht zum Gelände einschlägt.	4

3.5.0	Die Funktion r mit dem Funktionsterm $r(x) = -0{,}0008x^3 + 0{,}02x^2 + x;\ x \in [0;50]$ ordnet jedem x die momentane Flughöhe des Gegenstandes über dem Gelände zu.	
3.5.1	Geben Sie die Nullstellen von r für $x \in [0;50]$ an.	2
3.5.2	Berechnen Sie die Stelle x_2, an der die Flugbahn die maximale Flughöhe über dem Gelände aufweist. Berechnen Sie diese maximale Flughöhe auf zwei Nachkommastellen gerundet.	7
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 4		BE
4.0	Die Funktion p mit dem Funktionsterm $p(t)=\frac{12}{t^2-2t+4}+2$ beschreibt für $t\geq 0$ (nach heftigen Regenfällen) den Pegelstand eines Flusses an einer Messstation in Abhängigkeit von der Zeit t. Der Zeitpunkt $t=0$ kennzeichnet das Ende der Regenfälle. Dabei wird t in Tagen und $p(t)$ in Metern gemessen. Bei der Rechnung soll auf die Einheiten verzichtet werden.	
4.1	Bestimmen Sie den Pegelstand zum Zeitpunkt $t=0$ und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von p für $t\to\infty$. Geben Sie die Gleichung und Art der Asymptote des Graphen der Funktion p an.	4
4.2	Zeigen Sie, dass der Pegelstand des Flusses nach dem Ende der Regenfälle noch weiter ansteigt, und ermitteln Sie den Zeitpunkt des Höchststandes („Scheitel") des Pegels. Berechnen Sie auch den Scheitelwert des Pegels. $\left[\text{mögliches Teilergebnis}: p'(t)=\frac{-24(t-1)}{(t^2-2t+4)^2}\right]$	6
4.3	Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt der Pegelstand am stärksten fällt.	6
4.4	Sinkt der Pegelstand unter drei Meter, sind keine Straßen und Wege mehr überflutet. Berechnen Sie den Zeitpunkt der damit ausgesprochenen Entwarnung.	4
4.5	Skizzieren Sie nach Berechnung von $p(10)$ den Graphen G_p samt seiner Asymptote im Bereich $0\leq t\leq 10$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in einem geeigneten Koordinatensystem.	5
	Summe:	25

Analytische Geometrie: Aufgabe 5		BE
5.0	Gegeben sind im $\mathbb{R}^3$ die Ebenen $E: 5x_1 - x_2 - 4x_3 - 15 = 0$ und $F: x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3 = 0$ sowie der Punkt $A(1/-2/-2)$.	
5.1	Zeigen Sie explizit, dass die beiden Ebenen E und F nicht parallel sind, und berechnen Sie sodann ihren Schnittwinkel. Weisen Sie nach, dass der Punkt A beiden Ebenen angehört.	6
5.2	Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g beider Ebenen. [ein mögliches Teilergebnis lautet: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$]	4
5.3	Ermitteln Sie den Schnittpunkt C der Geraden g mit der x_1x_2-Ebene. Berechnen Sie sodann die Entfernung des Punktes A vom Punkt C.	4
5.4	Gegeben ist das Dreieck ABC mit $B(0/1/-4)$ und $C(3/0/0)$. Überprüfen Sie, ob es sich beim Dreieck ABC um ein rechtwinkliges Dreieck handelt.	3
5.5	Die Punkte A, B, C und $S_k(k/k/k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ bilden Pyramiden mit den Spitzen S_k. Berechnen Sie die Volumina dieser Pyramiden in Abhängigkeit von k. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.	5
5.6	Die Pyramiden aus 5.5 werden auf halber Höhe von einer zur Grundfläche parallelen Ebene geschnitten. Dabei entstehen Restpyramiden und Pyramidenstumpfe. Wie verhalten sich die Volumina der Restpyramiden zu den Volumina der ursprünglichen Pyramiden? Begründen Sie Ihre Antwort möglichst einfach und anschaulich.	3
	Summe:	25