

Teil I: Stoffgebiete der Mittelstufe

Binomische Formeln

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b) \cdot (a-b) &= a^2 - b^2 & a^3 - b^3 &= (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Lösungsformel für die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Potenzen und Wurzeln

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 & a^1 &= a & a^{-x} &= \frac{1}{a^x} & (a^x)^z &= a^{x \cdot z} \\ a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} & a^{\frac{n}{m}} &= \sqrt[m]{a^n} & a^x \cdot a^z &= a^{x+z} & \frac{a^x}{a^z} &= a^{x-z} \\ a^x \cdot a^z &= a^{x+z} & \frac{a^x}{a^z} &= a^{x-z} & a^x \cdot b^x &= (ab)^x & \frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} &= a & \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} &= \sqrt{ab} & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

Geradengleichung

$$f(x) = mx + t;$$

Punkt-Steigungsform: $f(x) = m \cdot (x - x_0) + y_0$

Schnittwinkel zweier Geraden

$$\tan \varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$$

Parabelgleichung

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{allgemeine Form})$$

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \quad (\text{Scheitelform})$$

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad (\text{Linearfaktorform})$$

Logarithmen

$$\log_b(uv) = \log_b(u) + \log_b(v) \quad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$$

$$\log_b(u^z) = z \cdot \log_b(u) \quad \log_c(a) = \frac{\log_b(a)}{\log_b(c)}$$

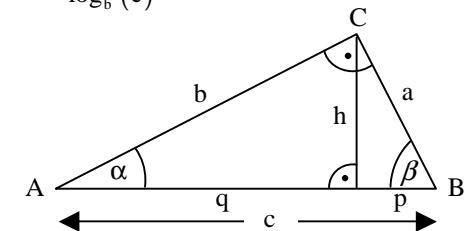
Rechtwinkliges Dreieck

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = pq$

Kathetensatz: $a^2 = cp$; $b^2 = cq$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}; \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}$$



Allgemeines Dreieck

Sinussatz: $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$

Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Sinus und Kosinus

$$(\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 = 1$$

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$$

$$\cos(-\varphi) = \cos \varphi$$

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi$$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\cos 2\varphi = (\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi)^2$$

$$\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos \varphi)$$

$$\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos \varphi)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Flächengeometrie

$$\text{Allgemeines Dreieck: } A = \frac{1}{2} g h$$

$$\text{Trapez: } A = \frac{a+c}{2} h$$

$$\text{Gleichseitiges Dreieck: } A = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}; \quad h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

$$\text{Kreis: } U = 2r\pi; \quad A = r^2\pi$$

Raumgeometrie

$$\text{Prisma: } V = G h$$

$$\text{Pyramide: } V = \frac{1}{3} G h$$

$$\text{gerader Kreiszyylinder: } V = r^2 \pi h; \quad M = 2r \pi h$$

$$\text{gerader Kreiskegel: } V = \frac{1}{3} r^2 \pi h; \quad M = r \pi m$$

$$\text{Kugel: } V = \frac{4}{3} r^3 \pi; \quad O = 4r^2 \pi$$

Teil II: Analysis**Grenzwerte**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^r \cdot \ln x) = 0 \quad (\text{jeweils } r > 0)$$

Definition der Ableitung

$$\text{Ableitung: } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

falls der Grenzwert existiert und endlich ist.

$$\text{Schreibweisen: } f'(x) = y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}; \quad \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$$

Ableitung der Grundfunktionen

$$(x^r)' = r x^{r-1} \quad \left(\frac{1}{x^r}\right)' = -\frac{r}{x^{r+1}} \quad (e^x)' = e^x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Ableitungsregeln

$$\text{Summenregel: } f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$\text{Faktorregel: } f(x) = c \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\text{Produktregel: } f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\text{Quotientenregel: } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\text{Kettenregel: } f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

L'Hospitalsche Regeln

- Gilt $z(a) = n(a) = 0$ und existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{z'(x)}{n'(x)}$, so gilt $\lim_{x \rightarrow a} \frac{z(x)}{n(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{z'(x)}{n'(x)}$
- Gilt $|z(x)| \rightarrow \infty$ und $|n(x)| \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow a$ und existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{z'(x)}{n'(x)}$,
so gilt $\lim_{x \rightarrow a} \frac{z(x)}{n(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{z'(x)}{n'(x)}$
- Beide Regeln gelten in ähnlicher Weise auch für $|x| \rightarrow \infty$ (anstelle von $x \rightarrow a$)

Anwendungen der Differenzialrechnung

- Gleichung der Tangente im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
- Monotoniekriterium:
 $f'(x) < 0$ im Intervall $I \Rightarrow f$ fällt streng monoton in I .
 $f'(x) > 0$ im Intervall $I \Rightarrow f$ steigt streng monoton in I .
- Art von Extremwerten (mithilfe der zweiten Ableitung):
 $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ hat an der Stelle x_0 ein relatives Minimum.
 $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ hat an der Stelle x_0 ein relatives Maximum.
- Graphenkrümmung:
 $f''(x) < 0$ im Intervall $I \Rightarrow G_f$ ist in I rechtsgekrümmt.
 $f''(x) > 0$ im Intervall $I \Rightarrow G_f$ ist in I linksgekrümmt.
- Wendepunkt:
Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen,
so hat G_f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.
- Terrassenpunkt:
Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen,
so hat G_f an der Stelle x_0 einen Terrassenpunkt.

Newtonsche Iterationsformel

zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems

$f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D \Leftrightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse
(f heißt dann *gerade Funktion*)

$f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D \Leftrightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung
(f heißt dann *ungerade Funktion*)

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

1) Ist f eine in $[a; b]$ stetige Funktion, so ist

- die Integralfunktion $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ differenzierbar
- und F_a ist eine Stammfunktion von f , d.h. $F_a'(x) = f(x)$.

2) Ist F eine Stammfunktion von f , so gilt $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

Partielle Integration

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx$$

Integration durch Substitution

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad \text{mit } x = g(t)$$

Uneigentliche Integrale

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Volumen eines Rotationskörpers bei Rotation um die x-Achse

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Wichtige unbestimmte Integrale

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int \ln x dx = -x + x \ln x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C \quad \int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$, wobei F Stammfunktion von f ist.

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C \quad \int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad \text{(Kreisintegral)}$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

Teil III: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Gesetze der Mengenalgebra: $\bar{\bar{A}} = A; \quad A \cup \bar{A} = \Omega; \quad A \cap \bar{A} = \{ \};$
 $\bar{\bar{A}} = A; \quad A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Gesetze von De Morgan: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}; \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Unvereinbarkeit: $A \cap B = \{ \}$

Ereigniswahrscheinlichkeiten: $P(\{ \}) = 0; \quad P(\Omega) = 1; \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Satz von Sylvester: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Unabhängigkeit von zwei Ereignissen: $P_A(B) = P(B)$
 oder auch: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Fakultät: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
 Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Elemente in einer Reihe anzuordnen.

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$
 Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge mit n Elementen Teilmengen mit k Elementen zu bilden.

Laplace-Experiment: Alle Elementarereignisse des zugehörigen Ergebnisraumes sind gleich wahrscheinlich.

Es gilt dann: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Zufallsgrößen – Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Die Zufallsgröße X nehme die Werte x_1, x_2, \dots, x_n jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n an. Dann gilt:

- **Erwartungswert:** $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$

- **Varianz:**
$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i \\ &= (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n \end{aligned}$$

Verschiebungsregel: $\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$

- **Standardabweichung:** $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Binomialverteilung

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Treffer in einer Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p . Dann heißt die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung „**Binomialverteilung**“. X heißt binomialverteilt, genauer $B(n; p)$ -verteilt.

Ist die Zufallsgröße X binomialverteilt nach $B(n; p)$, so gilt:

$$P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n$$

mit Erwartungswert $E(X) = n \cdot p$ und Varianz $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Hypothesentest

Beim Testen der Nullhypothese H_0 im Signifikanztest können zwei Fehler auftreten:

Fehler 1. Art: H_0 wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist.

Fehler 2. Art: H_0 wird angenommen, obwohl sie falsch ist.

Als „**Signifikanzniveau**“ α des Tests bezeichnet man die größtmögliche noch akzeptierte Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

Normalverteilung

Dichtefunktion:
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Verteilungsfunktion:
$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Standardisierung:

Dichtefunktion:
$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

Verteilungsfunktion:
$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Es gilt:
$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$$

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

(brauchbar für $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$)

$$B(n; p; k) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{mit } \mu = n \cdot p \quad \text{und } \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

$$F(x) \approx \Phi\left(\frac{x-\mu+\frac{1}{2}}{\sigma}\right)$$

Teil IV: Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + a_{13} \cdot v_3 \\ a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + a_{23} \cdot v_3 \\ a_{31} \cdot v_1 + a_{32} \cdot v_2 + a_{33} \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Skalarprodukt im } \mathbb{R}^3: \vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Eigenschaften und Anwendungen des Skalarprodukts

- zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$

$$\text{Vektorprodukt im } \mathbb{R}^3: \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften und Anwendungen des Vektorproduktes

- $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf \vec{a} und \vec{b}
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$
- Flächeninhalt F des Dreiecks ABC: $F = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$
- Volumen V der dreiseitigen Pyramide ABCD: $V = \frac{1}{6} |\overline{AB} \circ (\overline{AC} \times \overline{AD})|$

Lineare Unabhängigkeit

Drei Vektoren \vec{a}, \vec{b} und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} = \vec{0}$ nur mit $\lambda = \mu = \nu = 0$ lösbar ist.

Alternativ gilt: \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} linear unabhängig $\Leftrightarrow \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$

Gerade im \mathbb{R}^3

- Punkt-Richtungsform: $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$
- Zwei-Punkte-Form: $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Ebene im \mathbb{R}^3

Parameterformen

- Punkt-Richtungsform: $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$
- Drei-Punkte-Form: $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + \mu \cdot (\vec{c} - \vec{a})$

Parameterfreie Formen

- Koordinatenform: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$
- Achsenabschnittsform: $E: \frac{x_1}{s} + \frac{x_2}{t} + \frac{x_3}{u} = 1$

Festlegung durch die Achsenschnittpunkte $S(s|0|0)$, $T(0|t|0)$ und $U(0|0|u)$

- Normalenform: $E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$